KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

O układach równań i nierówności wielomianowych

Stanisław Spodzieja

Wydział Matematyki i Informatyki

Uniwersytetu Łódzkiego

Węgierska Górka 2010

Streszczenie

Celem wykładu jest przedstawienie znaczenia metody Sturma w geometrii zbiorów semialgebraicznych. Dokładniej, zajmiemy się następującymi zagadnieniami:

1. Twierdzenie Sturma.

2. Zbiory semialgebraiczne.

3. Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga.

4. Lemat R. Thoma.

5. Rozkład cylindryczny zbioru semialgebraicznego.

1. Twierdzenie Sturma

Rozwiązywanie równań algebraicznych interesowało matematyków od czasów starożytnych. Narzucały je problemy geometryczne wynikające z zagadnień praktycznych. Prawdopodobnie już starożytni Babilończycy umieli rozwiązywać równania kwadratowe (połowa XX w. przed Chrystusem). Wobec braku algorytmu rozwiązywania równań wyższych stopni, wielu matematyków rozważało problem:

istnienia i ilości rozwiązań rzeczywistych równań wielomianowych

np.: Kartezjusz (1596-1650), Rolle (1652-1719), Lagrange (1736-1813), Fourier (1768-1830), Cauchy (1789-1857), Sturm (1803-1855), Hermite (1822-1901), Kronecker (1823-1891).

1. Twierdzenie Sturma

Rozwiązywanie równań algebraicznych interesowało matematyków od czasów starożytnych. Narzucały je problemy geometryczne wynikające z zagadnień praktycznych. Prawdopodobnie już starożytni Babilończycy umieli rozwiązywać równania kwadratowe (połowa XX w. przed Chrystusem). Wobec braku algorytmu rozwiązywania równań wyższych stopni, wielu matematyków rozważało problem:

istnienia i ilości rozwiązań rzeczywistych równań wielomianowych

np.: Kartezjusz (1596-1650), Rolle (1652-1719), Lagrange (1736-1813), Fourier (1768-1830), Cauchy (1789-1857), Sturm (1803-1855), Hermite (1822-1901), Kronecker (1823-1891).

Pierwsze pełne rozwiązanie tego problemu (choć niezbyt przydatne w praktyce) podał Cauchy (1814, 1815, 1820). Prosty algorytm obliczania ilości zer wielomianu podał Sturm (1829, 1835). Celem tego punktu jest przedstawienie tego algorytmu.

Zacznijmy od definicji:

Definicja. Mówimy, że *ciąg* $(p_0, \ldots, p_m) \in \mathrm{R}^{m+1}$ *zmienia znak* na i-tym miejscu, gdy istnieje $l \geqslant i$ takie, że

$$p_{i-1}p_l < 0 \quad \text{oraz} \quad p_j = 0 \quad \text{dla} \quad i \leqslant j \leqslant l-1.$$

Zacznijmy od definicji:

Definicja. Mówimy, że *ciąg* $(p_0, \ldots, p_m) \in \mathrm{R}^{m+1}$ *zmienia znak* na i-tym miejscu, gdy istnieje $l \geqslant i$ takie, że

$$p_{i-1}p_l < 0 \quad \text{oraz} \quad p_j = 0 \quad \text{dla} \quad i \leqslant j \leqslant l-1.$$

Niech t oznacza jedną zmienną.

Definicja. *Ciągiem Sturma* wielomianów $P_0, P_1 \in \mathrm{R}[t]$, gdzie $P_1 \neq 0$, nazywamy ciąg $P_0, \ldots, P_m \in \mathrm{R}[t]$ określony algorytmem Euklidesa:

(E) $\quad P_{i-1} = P_i F_i - P_{i+1}, \quad \deg P_{i+1} < \deg P_i \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, m,$

gdzie $P_m \neq 0$, $P_{m+1} = 0$ oraz $F_1, \ldots, F_m \in \mathrm{R}[t]$.

Zacznijmy od definicji:

Definicja. Mówimy, że *ciąg* $(p_0, \ldots, p_m) \in \mathrm{R}^{m+1}$ *zmienia znak* na i-tym miejscu, gdy istnieje $l \geqslant i$ takie, że

$$p_{i-1}p_l < 0 \quad \text{oraz} \quad p_j = 0 \quad \text{dla} \quad i \leqslant j \leqslant l-1.$$

Niech t oznacza jedną zmienną.

Definicja. *Ciągiem Sturma* wielomianów $P_0, P_1 \in \mathrm{R}[t]$, gdzie $P_1 \neq 0$, nazywamy ciąg $P_0, \ldots, P_m \in \mathrm{R}[t]$ określony algorytmem Euklidesa:

(E) $\quad P_{i-1} = P_iF_i - P_{i+1}, \quad \deg P_{i+1} < \deg P_i \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, m,$

gdzie $P_m \neq 0$, $P_{m+1} = 0$ oraz $F_1, \ldots, F_m \in \mathrm{R}[t]$.

Definicja. Niech $P \in \mathrm{R}[t]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia. Niech $P_0, \ldots, P_m$ będzie ciągiem Sturma wielomianów P i P' (tzn. $P_0 = P$, $P_1 = P'$). Dla każdego $a \in \mathrm{R}$ oznaczamy:

$$v_P(a) = \text{ilość miejsc zmian znaku ciągu } P_0(a), \ldots, P_m(a).$$

Twierdzenie 1. (Sturm). *Niech* $P \in \mathrm{R}[t]$ *będzie wielomianem dodatniego stopnia i niech* $a, b \in \mathrm{R}$, $a < b$ *oraz* $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$. *Wówczas wielomian* P *w przedziale* (a, b) *ma dokładnie* $v_P(a) - v_P(b)$ *zer* (*bez uwzględniania ich krotności*).

Twierdzenie 1. (Sturm). *Niech $P \in \mathrm{R}[t]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia i niech $a, b \in \mathrm{R}$, $a < b$ oraz $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$. Wówczas wielomian P w przedziale (a, b) ma dokładnie $v_P(a) - v_P(b)$ zer (bez uwzględniania ich krotności).*

Twierdzenie to jest dobrze znane, jego dowód można znaleźć na przykład w książce:

A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyzszej*, PWN, Warszawa 1956.

Wynik Sturma zyskał ogromne uznanie wśród matematyków, co oddaje opinia Hermite:

"Twierdzenie Sturma zrobiło wielką furorę stając się natychmiast klasycznym i na zawsze znalazło miejsce w nauce. Jego dowód, w którym używane są tylko najbardziej elementarne metody, jest rzadkim przykładem prostoty i elegancji"
(http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Sturm.html).

Twierdzenie Sturma zilustrujemy przykładem.

Przykład 1. *Niech* $P = t^3 - 3t + 1$*. Wówczas ciągiem Sturma wielomianów* P *i* P' *jest*

$$P_0 = t^3 - 3t + 1, \quad P_1 = 3t^2 - 3, \quad P_2 = 2t - 1, \quad P_3 = 9/\ 4.$$

- *Dla* $a = 0$ *ciąg wartości powyższych wielomianów ma postać*

$$(1, -3, -1, 9/\ 4),$$

  więc $v_P(0) = 2$.

- *Dla* $a = 1$ *ciąg wartości powyższych wielomianów ma postać*

$$(-1, 0, 1, 9/\ 4),$$

  więc $v_P(1) = 1$.

W konsekwencji, $v_P(0) - v_P(1) = 1$*. Zatem twierdzenie 1 daje, że wielomian* P *ma w przedziale* $(0, 1)$ *dokładnie jedno zero.*

Niech $P \in \mathrm{R}[t]$ będzie wielomianami dodatniego stopnia.

Definicja. Przez $\mathrm{lc}(P)$ oznaczamy współczynnik wielomianu P przy najwyższej potędze t.

Niech $P \in \mathrm{R}[t]$ będzie wielomianami dodatniego stopnia.

Definicja. Przez $\mathrm{lc}(P)$ oznaczamy współczynnik wielomianu P przy najwyższej potędze t.

Definicja. Dla ciągu Sturma $P_0, \ldots, P_m$ wielomianów P i P', przyjmujemy:

$v_P(-\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_0(-t)), \ldots, \mathrm{lc}(P_m(-t))$,
$v_P(+\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_0), \ldots, \mathrm{lc}(P_m)$.

Niech $P \in \mathrm{R}[t]$ będzie wielomianami dodatniego stopnia.

Definicja. Przez $\mathrm{lc}(P)$ oznaczamy współczynnik wielomianu P przy najwyższej potędze t.

Definicja. Dla ciągu Sturma $P_0, \ldots, P_m$ wielomianów P i P', przyjmujemy:

$v_P(-\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_0(-t)), \ldots, \mathrm{lc}(P_m(-t))$,
$v_P(+\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_0), \ldots, \mathrm{lc}(P_m)$.

Z twierdzenia 1 Sturma dostajemy wzór na ilość rzeczywistych zer wielomianu:

Wniosek 1. *Wielomian P ma w R dokładnie $v_P(-\infty) - v_P(+\infty)$ zer.*

Przykład 2. *Obliczmy ilość zer wielomianu $P = t^3 - 3t + 1$ z przykładu 1. Ciągiem Sturma wielomianów P i P' jest*

$$P_0 = t^3 - 3t + 1, \quad P_1 = 3t^2 - 3, \quad P_2 = 2t - 1, \quad P_3 = 9/4,$$

więc

$$\mathrm{lc}(P_0(-t)) = -1,\ \mathrm{lc}(P_1(-t)) = 3,\ \mathrm{lc}(P_2(-t)) = -2,\ \mathrm{lc}(P_3(-t)) = 9/4,$$

$$\mathrm{lc}(P_0) = 1, \quad \mathrm{lc}(P_1) = 3, \quad \mathrm{lc}(P_2) = 2, \quad \mathrm{lc}(P_3) = 9/4.$$

Stąd, $v_P(-\infty) = 3$, $v_P(+\infty) = 0$ i wobec wniosku 1, ilość rzeczywistych zer wielomianu P wynosi

$$v_P(-\infty) - v_P(+\infty) = 3 - 0 = 3.$$

Niech $P, Q \in \mathrm{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni.

Definicja. Dla ciągu Sturma $P_0, \ldots, P_m$ wielomianów P i $P' \cdot Q$, przyjmujemy:

$v_{P,Q}(-\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_0(-t)), \ldots, \mathrm{lc}(P_m(-t))$,
$v_{P,Q}(+\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_0), \ldots, \mathrm{lc}(P_m)$.

Niech $P, Q \in \mathrm{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni.

Definicja. Dla ciągu Sturma $P_0, \ldots, P_m$ wielomianów P i $P' \cdot Q$, przyjmujemy:

$v_{P,Q}(-\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_0(-t)), \ldots, \mathrm{lc}(P_m(-t))$,
$v_{P,Q}(+\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_0), \ldots, \mathrm{lc}(P_m)$.

Podobnie jak twierdzenia 1 dowodzimy:

Twierdzenie 2. *Ilość zer $c \in \mathrm{R}$ wielomianu P takich, że $Q(c) > 0$ minus ilość zer $c \in \mathrm{R}$ wielomianu P takich, że $Q(c) < 0$, wynosi $v_{P,Q}(-\infty) - v_{P,Q}(+\infty)$.*

Niech $P, Q \in \mathrm{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni.

Definicja. Dla ciągu Sturma $P_0, \ldots, P_m$ wielomianów P i $P' \cdot Q$, przyjmujemy:

$v_{P,Q}(-\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_0(-t)), \ldots, \mathrm{lc}(P_m(-t))$,
$v_{P,Q}(+\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_0), \ldots, \mathrm{lc}(P_m)$.

Podobnie jak twierdzenia 1 dowodzimy:

Twierdzenie 2. *Ilość zer $c \in \mathrm{R}$ wielomianu P takich, że $Q(c) > 0$ minus ilość zer $c \in \mathrm{R}$ wielomianu P takich, że $Q(c) < 0$, wynosi $v_{P,Q}(-\infty) - v_{P,Q}(+\infty)$.*

Stosując twierdzenie 2 łatwo dowodzimy:

Wniosek 2. *Niech $P, Q_1, \ldots, Q_k \in \mathrm{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni. Wówczas ilość zer $c \in \mathrm{R}$ wielomianu P takich, że $Q_1(c) > 0, \ldots, Q_k(c) > 0$, wynosi*

$$(1/\,2^k) \sum_{\sigma \in \{1,2\}^k} [v_{P,Q^\sigma}(-\infty) - v_{P,Q^\sigma}(+\infty)],$$

gdzie $Q^\sigma = Q_1^{\sigma_1} \cdots Q_k^{\sigma_k}$ dla $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, $\sigma_i \in \{1, 2\}$.

2. Zbiory semialgebraiczne

Definicja. Zbiór $X \subset \mathrm{R}^n$ nazywamy *semialgebraicznym*, gdy jest on sumą skończonej ilości zbiorów postaci:

$$V = \{\zeta \in \mathrm{R}^n : P(\zeta) = 0, \, Q_1(\zeta) > 0, \, \ldots, \, Q_k(\zeta) > 0\},$$

gdzie $k \in \mathrm{Z}$, $k \geqslant 0$, oraz $P, Q_1 \ldots, Q_k \in \mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

2. Zbiory semialgebraiczne

Definicja. Zbiór $X \subset \mathrm{R}^n$ nazywamy *semialgebraicznym*, gdy jest on sumą skończonej ilości zbiorów postaci:

$$V = \{\zeta \in \mathrm{R}^n : P(\zeta) = 0,\, Q_1(\zeta) > 0,\, \ldots,\, Q_k(\zeta) > 0\},$$

gdzie $k \in \mathrm{Z}$, $k \geqslant 0$, oraz $P, Q_1 \ldots, Q_k \in \mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Uwaga 1. *Rodzina zbiorów semialgebraicznych przestrzeni R^n jest zamknięta ze względu na dopełnienie oraz sumy i iloczyny skończonej ilości zbiorów.*

3. Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga

Metoda Sturma zaowocowała w pracach Tarskiego (1948, 1951) dotyczących opuszczania kwantyfikatorów w formułach i dalej w pracy Seidenberga (1954) o istnieniu rozwiązań układu nierówności wielomianowych. Obecnie twierdzenia Tarskiego i Seidenberga formułuje się następująco:

Twierdzenie 3. (Tarski-Seidenberg). *Niech* $\pi : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$ *będzie rzutowaniem postaci* $\pi(\zeta, \xi) = \zeta$. *Jeśli* $X \subset \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m$ *jest zbiorem semialgebraicznym, to* $\pi(X) \subset \mathrm{R}^n$ *jest zbiorem semialgebraicznym.*

3. Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga

Metoda Sturma zaowocowała w pracach Tarskiego (1948, 1951) dotyczących opuszczania kwantyfikatorów w formułach i dalej w pracy Seidenberga (1954) o istnieniu rozwiązań układu nierówności wielomianowych. Obecnie twierdzenia Tarskiego i Seidenberga formułuje się następująco:

Twierdzenie 3. (Tarski-Seidenberg). *Niech* $\pi : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$ *będzie rzutowaniem postaci* $\pi(\zeta, \xi) = \zeta$*. Jeśli* $X \subset \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m$ *jest zbiorem semialgebraicznym, to* $\pi(X) \subset \mathrm{R}^n$ *jest zbiorem semialgebraicznym.*

Dowód powyższego twierdzenia można sprowadzić do przypadku, gdy

$$X = \{(\zeta, \xi) \in Y \times \mathrm{R} : P(\zeta, \xi) = 0,\, Q_1(\zeta, \xi) > 0, \ldots, Q_k(\zeta, \xi) > 0\},$$

gdzie $P, Q_1, \ldots, Q_k \in \mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n, t]$ i $Y \subset \mathrm{R}^n$ jest zbiorem semialgebraicznym takim, że wielomiany $P(\zeta, t)$, $Q_1(\zeta, t), \ldots, Q_k(\zeta, t) \in \mathrm{R}[t]$ dla $\zeta \in Y$ mają ustalone dodatnie stopnie.

Warunek $\zeta \in \pi(X)$ oznacza, że istnieje zero $c \in \mathrm{R}$ wielomianu $P(\zeta, t)$ takie, że $Q_1(\zeta, t) > 0, \ldots, Q_k(\zeta, t) > 0$. Wobec wniosku 2, warunek ten można zapisać jako alternatywę skończonej ilości skończonych układów równań i nierówności wielomianowych od ζ.

Uwaga 2. *Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga mówi o tym, że można opuszczać kwantyfikator szczegółowy w formułach dotyczących równań i nierówności wielomianowych (rzeczywistych) połączonych spójnikami* $\sim$, $\vee$, $\wedge$. *Ponieważ dopełnienie zbioru semialgebraicznego również jest zbiorem semialgebraicznym, to również w takich formułach można opuszczać kwantyfikator ogólny.*

Uwaga 2. *Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga mówi o tym, że można opuszczać kwantyfikator szczegółowy w formułach dotyczących równań i nierówności wielomianowych (rzeczywistych) połączonych spójnikami* $\sim$, $\vee$, $\wedge$. *Ponieważ dopełnienie zbioru semialgebraicznego również jest zbiorem semialgebraicznym, to również w takich formułach można opuszczać kwantyfikator ogólny.*

W świetle powyższej uwagi, z twierdzenia Tarskiego-Seidenberga dostajemy natychmiast:

Wniosek 3. *Jeśli* $X \subset \mathrm{R}^n$ *jest zbiorem semialgebraicznym, to jego domknięcie* $\overline{X}$, *brzeg* ∂X *i wnętrze* $\operatorname{Int} X$ *również są zbiorami semialgebraicznymi.*

4. Lemat R. Thoma

Równie eleganckim w swej prostocie jak twierdzenie Sturma jest lemat Thoma sformułowany przez Łojasiewicza (1965). Ma on ogromne konsekwencje w badaniach zbiorów semialgebraicznych.

Twierdzenie 4. (Lemat Thoma). *Niech* $P \in \mathrm{R}[t]$ *będzie wielomianem stopnia* d *oraz* $P^{(j)}$ *będzie* j*-tą pochodną wielomianu* P*. Wówczas dla każdego ciągu* $\triangleright = (\triangleright_0, \ldots, \triangleright_d)$*,* $\triangleright_i \in \{=, <, >\}$*, zbiór*

$$A_{\triangleright} = \{\xi \in \mathrm{R} : \; P^{(0)}(\xi) \triangleright_0 0\,, \;\ldots\;, P^{(d)}(\xi) \triangleright_d 0\},$$

albo jest pusty albo jednoelementowy albo przedziałem otwartym.

4. Lemat R. Thoma

Równie eleganckim w swej prostocie jak twierdzenie Sturma jest lemat Thoma sformułowany przez Łojasiewicza (1965). Ma on ogromne konsekwencje w badaniach zbiorów semialgebraicznych.

Twierdzenie 4. (Lemat Thoma). *Niech $P \in \mathrm{R}[t]$ będzie wielomianem stopnia d oraz $P^{(j)}$ będzie j-tą pochodną wielomianu P. Wówczas dla każdego ciągu $\triangleright = (\triangleright_0, \ldots, \triangleright_d)$, $\triangleright_i \in \{=, <, >\}$, zbiór*

$$A_\triangleright = \{\xi \in \mathrm{R} : \ P^{(0)}(\xi) \triangleright_0 0\,, \ \ldots\ , \ P^{(d)}(\xi) \triangleright_d 0\},$$

albo jest pusty albo jednoelementowy albo przedziałem otwartym.

Szkic dowodu. Indukcja względem d. Dla $d = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla wielomianów stopnia $d-1$ i niech P będzie wielomianem stopnia d. Wówczas $\deg P^{(1)} = d-1$, więc z założenia indukcyjnego wielomian P jest funkcją monotoniczną w zbiorze

$$A'_\triangleright = \{\xi \in \mathrm{R} : \ P^{(1)}(\xi) \triangleright_1 0\,, \ \ldots\ , \ P^{(d)}(\xi) \triangleright_d 0\}$$

Stąd dostajemy tezę dla wielomianu P.

Definicja. Dla $\triangleright_i \in \{=, <, >\}$, przyjmujemy

$$\underline{\triangleright_i} = \begin{cases} = & \text{dla} \quad \triangleright_i \quad \text{równego} \quad = \\ \leqslant & \text{dla} \quad \triangleright_i \quad \text{równego} \quad < \\ \geqslant & \text{dla} \quad \triangleright_i \quad \text{równego} \quad > \end{cases}.$$

Definicja. Dla $\rhd_i \in \{=, <, >\}$, przyjmujemy

$$\underline{\rhd_i} = \begin{cases} = & \text{dla} \quad \rhd_i \quad \text{równego} \quad = \\ \leqslant & \text{dla} \quad \rhd_i \quad \text{równego} \quad < \\ \geqslant & \text{dla} \quad \rhd_i \quad \text{równego} \quad > \end{cases}.$$

Analogicznie jak twierdzenia 4 dowodzimy

Twierdzenie 5. (Lemat Thoma). *Niech $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathrm{R}[t]$ będzie ciągiem wielomianów zamkniętym ze względu na różniczkowanie, tzn. dla każdego Q_i istnieje j, że $Q_j = Q_i'$. Wówczas dla każdego ciągu $\rhd = (\rhd_1, \ldots, \rhd_m)$, $\rhd_i \in \{=, <, >\}$, zbiór*

$$A_{\rhd} = \{t \in \mathrm{R} : \; Q_1(t) \rhd_1 0 \,, \; \ldots \;, \; Q_m(t) \rhd_m 0\},$$

albo jest pusty albo jednoelementowy albo przedziałem otwartym.

Definicja. Dla $\rhd_i \in \{=, <, >\}$, przyjmujemy

$$\underline{\rhd_i} = \begin{cases} = & \text{dla} \quad \rhd_i \quad \text{równego} \quad = \\ \leqslant & \text{dla} \quad \rhd_i \quad \text{równego} \quad < \\ \geqslant & \text{dla} \quad \rhd_i \quad \text{równego} \quad > \quad . \end{cases}$$

Analogicznie jak twierdzenia 4 dowodzimy

Twierdzenie 5. (Lemat Thoma). *Niech* $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathrm{R}[t]$ *będzie ciągiem wielomianów zamkniętym ze względu na różniczkowanie, tzn. dla każdego* Q_i *istnieje* j*, że* $Q_j = Q_i'$*. Wówczas dla każdego ciągu* $\rhd = (\rhd_1, \ldots, \rhd_m)$, $\rhd_i \in \{=, <, >\}$*, zbiór*

$$A_{\rhd} = \{t \in \mathrm{R} : \; Q_1(t) \rhd_1 0 \,, \; \ldots \;, \; Q_m(t) \rhd_m 0\},$$

albo jest pusty albo jednoelementowy albo przedziałem otwartym. Zaś zbiór

$$A_{\underline{\rhd}} = \{t \in \mathrm{R} : \; Q_1(t) \underline{\rhd_1} 0 \,, \; \ldots \;, \; Q_m(t) \underline{\rhd_m} 0\},$$

albo jest pusty albo jednoelementowy albo przedziałem domkniętym różnym od punktu, którego wnętrzem jest $A_{\rhd}$.

5. Rozklad cylindryczny zbioru semialgebraicznego

Stosując lemat Thoma i twierdzenie Tarskiego-Seidenberga, dostajemy następujący rozkład zbioru semialgebraicznego:

Twierdzenie 6. *Niech* $X \subset \mathrm{R}^n$, $n > 1$, *będzie zbiorem semialgebraicznym. Wówczas istnieje rozkład przestrzeni* R^n

$$\mathrm{R}^n = A_1 \cup \ldots \cup A_m$$

na spójne, parami rozłączne zbiory semialgebraiczne postaci

$$A_i = \{(\zeta, \xi) \in B_i \times \mathrm{R}: \;\; f_i(\zeta) < \xi < g_i(\zeta)\}$$

lub

$$A_i = \{(\zeta, \xi) \in B_i \times \mathrm{R}: \;\; \xi = f_i(\zeta)\},$$

gdzie $B_i \subset \mathrm{R}^{n-1}$ *jest zbiorem semialgebraicznym,* $f_i \equiv -\infty$ *lub* $g_i \equiv +\infty$ *lub* $f_i, g_i : B_i \to \mathrm{R}$ *są ciągłymi funkcjami o wykresach semialgebraicznych i* $f_i(\zeta) < g_i(\zeta)$ *dla* $\zeta \in B_i$,
przy czym X *jest sumą pewnej podrodziny rodziny zbiorów* $A_1, \ldots, A_m$.

Twierdzenie 6 stosowane indukcyjnie prowadzi do algebraicznego rozkładu cylindrycznego.

Definicja. *Algebraicznym rozkładem cylindrycznym* zbioru semialgebraicznego X nazywamy rozkład zbioru X spełniający tezę twierdzenia 6, przy czym zbiory B_i są jednoelementowe lub są przedziałami otwartymi, gdy $n-1=1$ oraz (indukcyjnie) B_i są analogicznej postaci jak A_i, gdy $n-1>1$.

Twierdzenie 6 stosowane indukcyjnie prowadzi do algebraicznego rozkładu cylindrycznego.

Definicja. *Algebraicznym rozkładem cylindrycznym* zbioru semialgebraicznego X nazywamy rozkład zbioru X spełniający tezę twierdzenia 6, przy czym zbiory B_i są jednoelementowe lub są przedziałami otwartymi, gdy $n-1=1$ oraz (indukcyjnie) B_i są analogicznej postaci jak A_i, gdy $n-1>1$.

W świetle twierdzenia 6, dowolny zbiór semialgebraiczny $X \subset \mathrm{R}^n$ ma rozkład cylindryczny, a więc

Wniosek 4. *Każdy zbiór semialgebraiczny jest sumą skończonej ilości spójnych podrozmaitości przestrzeni* R^n *będących zbiorami semialgebraicznymi.*

Twierdzenie 6 stosowane indukcyjnie prowadzi do algebraicznego rozkładu cylindrycznego.

Definicja. *Algebraicznym rozkładem cylindrycznym* zbioru semialgebraicznego X nazywamy rozkład zbioru X spełniający tezę twierdzenia 6, przy czym zbiory B_i są jednoelementowe lub są przedziałami otwartymi, gdy $n-1=1$ oraz (indukcyjnie) B_i są analogicznej postaci jak A_i, gdy $n-1>1$.

W świetle twierdzenia 6, dowolny zbiór semialgebraiczny $X \subset \mathrm{R}^n$ ma rozkład cylindryczny, a więc

Wniosek 4. *Każdy zbiór semialgebraiczny jest sumą skończonej ilości spójnych podrozmaitości przestrzeni* R^n *będących zbiorami semialgebraicznymi.*

Umiejętność rozkładania zbioru semialgebraicznego na części cylindryczne jest kluczowa w badaniach zbiorów semialgebraicznych. Prowadzi na przykład do triangulacji zbiorów semialgebraicznych. Podobne fakty zachodzą dla zbiorów semianalitycznych (Łojasiewicz, 1964) i subanalitycznych (Hironaka, 1974).

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY